Transformacja Lorentza.

Prędkość, pęd, energia

W artykule poprzednim, stanowiącym wprowadzenie do pojęć Szczególnej Teorii Względności, poznaliśmy naturalną transformację czasoprzestrzeni – transformację Lorentza, stanowiącą analog transformacji Galileusza w przestrzeni Euklidesa (dla ustalenia uwagi, dla ruchu względnego w kierunku *x*):

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Transformacja jako taka pokazuje, jak pomiędzy układami odniesienia przepisywać wektory – natywne obiekty (strzałki) w danej przestrzeni, na czele z wektorem położenia (uwzględniając względną prędkość *V* układów, z jaką układ O’ oddala się od O).

Tak samo transformacja Lorentza

$$\begin{cases} ct' = \gamma\left(ct - \beta x\right) \\ x' = \gamma\left(x - \beta ct\right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

($\beta = \dfrac{V}{c}$; $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{V^2}{c^2}}}$) pokazuje nam, jak w czasoprzestrzeni transformuje się jej naturalny obiekt, czyli wektor o czterech składowych (cztewrowektor) położenia $\left(ct, \vec{r}\right)$, przy upraszczającym założeniu – tym samym, co we wzorze Galileusza – że ruch względny układu O’ względem O odbywa się w kierunku *x*, dzięki czemu można ograniczyć się do płaszczyzny *x-ct*.

Prędkością nazywamy wielkość $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, a w interesującym nas kierunku *x* (porzućmy indeks) ma ona współrzędną $v \equiv \dfrac{dx}{dt}$. Sprawdźmy, jaką formułą wyraża się prędkość w układzie O’:

$$v' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt}\frac{1}{\left(\frac{dt'}{dt}\right)} = \frac{\gamma\, d[x - \beta ct]}{dt}\frac{1}{\frac{\gamma\, d[ct - \beta x]}{dt}} =$$

$$= \frac{c\left(v - V\right)}{c - \frac{V}{c}v} = \frac{v - V}{1 - \frac{Vv}{c^2}} \;.$$

Zauważmy, że prędkość *c* się nie transformuje (jest taka sama we wszystkich układach).

Formułę, określającą **pęd cząstki**, odnajduje się z pomocą ***eksperymentu myślowego Tolmana***, którego dokładny opis znajduje się m.in. w podręczniku Andrzeja Kajetana Wróblewskiego (tom I, rozdział 5). Rozważając zderzenia sprężyste dwóch cząstek w układzie ich środka masy, a następnie transformując klasycznie definiowane pędy do układów związanych z każdą z obu cząstek, poprzez narzucenie na wyniki zasady zachowania pędu, dochodzi się do formuły korygującej pęd, aby jego postać *mv* można było utrzymać w mocy. Mianowicie, masa cząstki musi stać się funkcją jej prędkości, o postaci $m(v) = \dfrac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. Wówczas pęd, dany formułą *mv*, przyjmuje skorygowaną postać $\vec{p} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\, m\, \vec{v}$ (*m* = *Const*). Pęd cząstki w układzie O' dany jest formułą $\vec{p}\,' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v'^2}{c^2}}}\, m\, \vec{v}\,'$. Niedługo zobaczymy, jak w transformacji Lorentza zachowuje się pęd *p'* względem pędu *p*. Aby to uczynić, należy wpierw zbadać formułę na energię, z którą pęd okaże się parować w transformacji, tak samo, jak *x* paruje się z *ct*, tworząc wspólny czterowektor.

Aby uzyskać wzór na energię relatywistyczną, rozważamy wpierw samą energię kinetyczną, która jest niczym innym, jak sumą (całką) przyczynków $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ na pewnej trasie C od punktu A (w którym *v = 0*) do B (w którym prędkość osiąga wartość końcową, bieżące *v*). Dla prostoty zapisu, przez podobieństwo formuły do γ, wprowadźmy oznaczenie $\gamma(v) := \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$.

$$E_k = \Delta E_{k,\,0\to v} = \int_{A,\mathbb{C}}^{B} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{A,\mathbb{C}}^{B} \frac{d\vec{p}}{dt}\, d\vec{r} = \int_{A,\mathbb{C}}^{B} d\vec{p}\cdot\vec{v} =$$

$$\left\{\begin{matrix}\text{doświadczenie}\\ \text{myślowe Tolmana}\end{matrix}\right\} = \int_{A,\mathbb{C}}^{B} d\big(m\,\gamma(v)\,\vec{v}\big)\cdot\vec{v} = \left\{\begin{matrix}\text{przez}\\ \text{części}\end{matrix}\right\} = m\,\gamma(v)\,v^2 - m\int_0^v \frac{v\,dv}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} =$$

$$\left\{\begin{matrix} b := v/c \\ c\,db = dv \\ v=0 \Rightarrow b=0 \\ v=v \Rightarrow b=b \end{matrix}\right\} = m\,\gamma(v)\,v^2 - m c^2 \int_0^b \frac{b\,db}{\sqrt{1-b^2}} =$$

$$\left\{\begin{matrix} k := b^2 \\ dk = 2b\ db \\ b=0 \Rightarrow k=0 \\ b=b \Rightarrow k=b^2 \end{matrix}\right\} = m\ \gamma(v)\, v^2 - \frac{mc^2}{2}\int_0^{b^2} \frac{dk}{\sqrt{1-k}} = m\ \gamma(v)\, v^2 - \frac{mc^2}{2}[-2\sqrt{1-k}\,]\Big|_0^{b^2} =$$

$$= m\ \gamma(v)\, v^2 + mc^2\left(\frac{1}{\gamma(v)} - 1\right) = \gamma(v) mc^2 - mc^2 =: E - E_{sp} .$$

Energia cząstki $E = E_k + E_{sp}$ jawi się zatem jako suma dwóch składników: energii kinetycznej, będącej funkcją prędkości cząstki, $E_k = (\gamma(v) - 1)mc^2$, i stałej energii spoczynkowej $E_{sp} = mc^2$. Nawet przy braku energii kinetycznej, cząstka zachowuje swoją energię spoczynkową. Można by było do powyższego wzoru dodać pewną stałą energię wewnętrzną cząstki (np. energię wiązania), jeśli oddziaływałaby ona z innymi cząstkami w układzie z nimi.

Dowód wykorzystanej w powyższym wyprowadzeniu (ostatnia linijka) tożsamości $\gamma(v)\ mv^2 + \frac{mc^2}{\gamma(v)} = \gamma(v)\ mc^2$ stanowi obligatoryjne i proste ćwiczenie dla Czytelnika. Wystarczy rozpisać $\gamma(v)$ po lewej stronie równości i wyciągnąć ją przed wspólny nawias. Drugą tożsamością algebraiczną, z dowodem której Czytelnik obowiązkowo musi się zmierzyć, raczej niż przyjąć ją na wiarę, to

$$\gamma(v) = \gamma \cdot \gamma(v') \cdot \left(1 + \frac{V v'}{c^2}\right) .$$

Podpowiedź: początek pracy z lewą stroną tożsamości: $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left[\frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}\right]^2}} = \cdots$,

co wynika z formuły na dole strony 1, z odwrotnej transformacji, tj. z *v* wyrażonego przez *V* i *v’* (wówczas prędkość unoszenia O względem O’ ma przeciwny znak i wynosi -*V*). Najprostsza droga jest następująca: należy sukcesywnie wymnażać wyrazy i sprowadzać do wspólnego mianownika, aż zarówno po lewej, jak i po prawej stronie udowadnianej równości uzyska się pierwiastek z pojedynczą kreską ułamkową wewnątrz. Wtedy można już dokonać wizualnego remanentu składników, osobno w licznikach, osobno w mianownikach i przekonać się naocznie, że L = P . □

Kiedy tożsamościową równość $\gamma(v) = \gamma \cdot \gamma(v') \cdot \left(1 + \frac{V v'}{c^2}\right)$ pomnożymy obustronnie przez mc^2 , to bez trudu zidentyfikujemy jej składniki jako

$$E \;=\; \gamma \cdot (E' + V\, p') \;\Leftrightarrow\; \frac{E}{c} \;=\; \gamma \cdot (\frac{E'}{c} \;+\; \beta\, p') \quad ,$$

bowiem $E = \gamma(v)mc^2, \; E' = \gamma(v')mc^2, \; p' = \gamma(v')mv'$. Przeciwnie, kiedy pomnożymy obie strony tożsamości przez *mv* i skorzystamy z transformacji odwrotnej prędkości $v \;=\; \dfrac{v' + V}{1 + \dfrac{v'V}{c^2}}$, wówczas będziemy mieli

$$\begin{gathered} \gamma(v)mv \;=\; \gamma \cdot (\gamma(v')mv' + \gamma(v')mV) \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow\; p \;=\; \gamma \cdot (p' \;+\; \beta\frac{E'}{c}) \;\; . \end{gathered}$$

Zestawienie obu wyników (poniżej, po lewej) z transformacją Lorentza z O’ do O czterowektora położenia (poniżej, po prawej)

$$\begin{cases} \dfrac{E}{c} \;=\; \gamma\,(\dfrac{E'}{c} \;+\; \beta\, p') \\ p \;=\; \gamma\,(p' \;+\; \beta\,\dfrac{E'}{c}) \end{cases} \quad , \qquad \begin{cases} ct \;=\; \gamma\,(ct' \;+\; \beta\, x') \\ x \;=\; \gamma\,(x' \;+\; \beta\, ct') \end{cases}$$

przekonuje nas, że wielkość $p^{\mu} \;:=\; [\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z]$ jest także czterowektorem. Jest to **czterowektor energii-pędu**. A skoro $(ct)^2 - \vec{r}^{\,2}$ jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, to również będzie nim wyrażenie $(\frac{E}{c})^2 - \vec{p}^{\,2}$. Różni obserwatorzy będą przypisywać różne wartości składnikom tego wyrażenia, ale po obliczeniu formuły jako całości, otrzymają taki sam wynik. Istotnie, licząc kwadrat długości p^{μ} (przy zachowaniu *sygnatury czasoprzestrzennej* [+, -, -, -], która pierwszy składnik nakazuje wziąć z plusem, a pozostałe z minusem), mnożąc strony dodatkowo przez c^2, dostajemy

$$\begin{gathered} p_{\mu}\, p^{\mu} c^2 \;=\; E^2 - p^2 c^2 \;=\; \gamma^2(v)(mc^2)^2 \;-\; \gamma^2(v)m^2 v^2 c^2 \;=\; \left\{ \begin{matrix} oznaczmy \\ \beta(v) := v/c \end{matrix} \right\} \;= \\ =\; \gamma^2(v)E_{sp}^2 \;-\; \gamma^2(v)\beta^2(v)E_{sp}^2 \;=\; E_{sp}^2\, \gamma^2(v)\,(1 - \beta^2(v)) \;=\; E_{sp}^2 \;\; . \end{gathered}$$

Masa vel energia spoczynkowa jest więc inwariantem transformacji Lorentza, wynosi tyle samo w każdym układzie odniesienia. Tę formułę wykorzystuje się intensywnie w analizie zderzeń i reakcji jądrowych.

Otrzymaliśmy zatem wniosek, że $E^2 - (pc)^2 = (mc^2)^2 \Leftrightarrow E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$. Jest to **związek dyspersyjny** czasoprzestrzeni, który sygnalizuje nam równoważność energii całkowitej, masy (spoczynkowej) i pędu w czasoprzestrzeni. Energia*/c* i pęd są składowymi czterowektora (zwykłej strzałki) na płaszczyźnie czasoprzestrzeni, a energia spoczynkowa jest jego długością. Pęd i masę rozumiemy tu klasycznie, jako trójwymiarowy wektor i stałą. W szczególności, foton, który pozbawiony jest masy, nadal posiada niezerowy pęd $p = \frac{E}{c}$.

Związek dyspersyjny prowadzi nas także do **zasady zachowania energii,** która głosi, że suma relatywistycznych energii kinetycznych cząstek i ich energii wewnętrznych – odpowiednika energii potencjalnej – jest stała przed i po reakcji. Zwykle uwidacznia się energię wiązania za pomocą *defektu masy*, tj. efektywnego zmniejszenia się masy (i równoważnej jej energii) układu związanych ze sobą cząstek, versus suma mas tego samego zbioru cząstek swobodnych.

Autor: Marek Pietrachowicz.